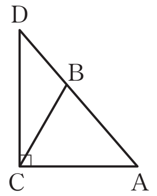
第９講　三角比・平面図形

1 [1]　右図において　$AD=\sqrt{7}$, $AC=\sqrt{3}$, $BC=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$, $\angle BCA=60°$, $\angle DCA=90°$ とする．このとき $\sin\angle CAB$ の値および AB の長さを求めよ．



[2]　x を正の実数とする．三角形 ABC において，$AB=x$，$BC=x+1$，$CA=x+2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　三角比の定義

「　直角　」が絡む図形については，常にその利用を視野に入れておく．

正弦定理と余弦定理

三角形の３つの辺と３つの角の内，「　　　　　つ」がわかれば発動．

「　　つの角（の三角比）がわかる」「　　がらみ」は正弦定理を積極的に狙うとよい．

それ以外は余弦定理の利用を視野に．

[2]　三角形の成立条件

正の数 a，b，c が三角形の３辺 $\Longleftrightarrow$「　$|b-c|<a<b+c$　」

特に a が最大辺のときは「$a<b+c$」のみで OK

鈍角・直角・鋭角三角形

「　　　　　」(「　　　　　」の対角）が鈍角か直角か鋭角か．

判別方法は「　　　　　　　　　との比較」または「　　　　の値」

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　円に内接する四角形 ABCD において，$AB=7\sqrt{2}$，$BC=8$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle ABC=45°$ とする．

(1)　対角線 AC の長さを求めよ．

(2)　辺 AD の長さを求めよ．

(3)　四角形 ABCD の面積を求めよ．

(4)　対角線 BD の長さを求めよ．

【Point Pickup】

円に内接する四角形

①　対角の和　=「　　　　」→ sin の値は「　　　　」　cos の値は「±　　　」

②　「　　　　」によって 2 つの三角形に分けられる → 三角比へ

③　外接円の半径 R は，その円に内接するどの三角形でも使える．

④　トレミーの定理

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$\angle$ACB が直角の △ABC において，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする．また，AB＝20，BD＝15 とする．

(1)　CD：ACを求めよ．

(2)　線分 AD の長さを求めよ．

(3)　△ABD の内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ．

【Point Pickup】

角の二等分線

・性質　→「　　　を分ける比」＝「　　　の比」

・その長さ → 分けられた角が

有名角なら「全体の △ の面積 = 分けられた三角形の面積の和」

有名角でないなら「大きい三角形」→「小さい三角形」

三角形の内接円の半径 r

⇒

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　三角比・平面図形

［1］ 円に内接する四角形 ABCD において，AB＝5，BC＝3，DA＝2，∠ABC＝60° であるとき，CD＝ ア ，△BCD＝$\dfrac{\boxed{イウエ}\sqrt{3}}{76}$，BD＝$\dfrac{\boxed{オカ}}{\sqrt{19}}$ である．

［2］ △ABC の 3 辺の長さが AB＝6，BC＝5，CA＝4 である．このとき $\cos\angle B=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．また，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を L とすると，BL＝ ケ ，AL＝ コ $\sqrt{\boxed{サ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

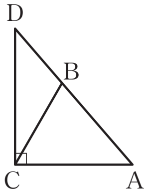
< Note >

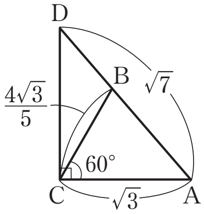
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　三角比・平面図形

1 [1]　右図において　$AD=\sqrt{7}$, $AC=\sqrt{3}$, $BC=\frac{4\sqrt{3}}{5}$, $\angle BCA=60°$, $\angle DCA=90°$ とする．このとき $\sin\angle CAB$ の値および AB の長さを求めよ．





三角形 ADC で三平方の定理より

$CD^2=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2=4$　　　$CD=2$

よって　$\sin\angle CAB=\sin\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{7}}}$

△ABC で正弦定理より

$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$　　よって　$AB=\frac{4\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{5}}$

1 [2]　x を正の実数とする．三角形 ABC において，$AB=x$，$BC=x+1$，$CA=x+2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

(1)　3 辺のうち，CA が最大辺

よって　$CA<AB+BC$　より　$x+2<x+(x+1)$　　ゆえに　$\boldsymbol{x>1}$

(2)　最大辺 CA の対角 ∠B が最大角である．

よって △ABC が鈍角三角形になるのは　$CA^2>AB^2+BC^2$ のとき

$(x+2)^2>x^2+(x+1)^2$　　$x^2-2x-3<0$　　よって　$-1<x<3$

(1)を考慮して　　$\boldsymbol{1<x<3}$

(別解)　余弦定理より　$\cos B=\frac{x^2+(x+1)^2-(x+2)^2}{2\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{2x(x+1)}=\frac{x-3}{2x}$

$-1<\cos B<0$ より　$-1<\frac{x-3}{2x}<0$　　$x>0$ より　$-2x<x-3<0$

よって　$1<x<3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 円に内接する四角形 ABCD において，$AB=7\sqrt{2}$，$BC=8$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle ABC=45°$ とする．

(1) 対角線 AC の長さを求めよ．

(2) 辺 AD の長さを求めよ．

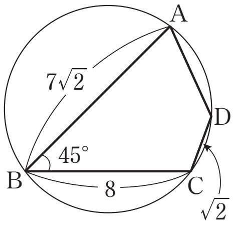
(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

(4) 対角線 BD の長さを求めよ．

(1) △ABC で余弦定理より

$AC^2=(7\sqrt{2})^2+8^2-2\cdot 7\sqrt{2}\cdot 8\cdot\cos 45°=98+64-112=50$　　よって　$\mathbf{AC=5\sqrt{2}}$

(2) $\angle ADC=180°-\angle ABC=135°$



$AD=x$　(>0)　とおくと，△ADC で余弦定理より

$(5\sqrt{2})^2=x^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135°$

$x^2+2x-48=0$　$(x+8)(x-6)=0$　よって　$x=\mathbf{AD=6}$

(3) 四角形 $ABCD=\triangle ABC+\triangle ADC=\dfrac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot 8\cdot\sin 45°+\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 135°$

$=28+3=\mathbf{31}$

(4) $\angle BAD=\theta$ とおくと，$\angle BCD=180°-\theta$

△ABD で余弦定理より

$BD^2=98+36-2\cdot 7\sqrt{2}\cdot 6\cdot\cos\theta=134-84\sqrt{2}\cos\theta$　……①

△CBD で余弦定理より

$BD^2=64+2-2\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(180°-\theta)=66+16\sqrt{2}\cos\theta$　……②

①，②より　$134-84\sqrt{2}\cos\theta=66+16\sqrt{2}\cos\theta$　　$\cos\theta=\dfrac{17}{25\sqrt{2}}$

このとき②より　$BD^2=66+16\sqrt{2}\cdot\dfrac{17}{25\sqrt{2}}=\dfrac{1922}{25}$　　よって　$\mathbf{BD=\dfrac{31\sqrt{2}}{5}}$

（別解） トレミーの定理より　$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

つまり　$7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+8\cdot 6=5\sqrt{2}\,BD$　　よって　$BD=\dfrac{62}{5\sqrt{2}}=\dfrac{31\sqrt{2}}{5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$\angle$ACB が直角の △ABC において，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする．また，AB＝20，BD＝15 とする．

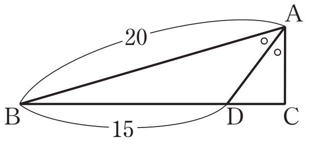
(1)　CD：AC を求めよ．

(2)　線分 AD の長さを求めよ．

(3)　△ABD の内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ．

(1)　角の二等分線の性質より

BD：CD＝AB：AC



つまり　15：CD＝20：AC　より　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$

したがって　**CD：AC＝3：4**

(2)　(1)より CD＝$3x$，AC＝$4x$ とおくと，

△ABC で三平方の定理より　$(15+3x)^2+(4x)^2=20^2$

$5x^2+18x-35=0$　　$(x+5)(5x-7)=0$　　$x=-5,\ \dfrac{7}{5}$　　$x>0$ より　$x=\dfrac{7}{5}$

また，△ADC で三平方の定理より　$\mathrm{AD}^2=(3x)^2+(4x)^2=25x^2$

したがって　**AD＝$5x$＝7**

(3)　△ABD の面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot15\cdot\dfrac{28}{5}=42$

また，$S=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD})=\dfrac{1}{2}r(20+15+7)=21r$

よって　$21r=42$ より　$\boldsymbol{r=2}$

$\angle\mathrm{ABD}=\theta$ とおくと，△ABC において　$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\frac{28}{5}}{20}=\dfrac{7}{25}$

△ABD で正弦定理より　$2R=\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin\theta}=\dfrac{7}{\frac{7}{25}}=25$　　よって　$\boldsymbol{R=\dfrac{25}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　三角比・平面図形

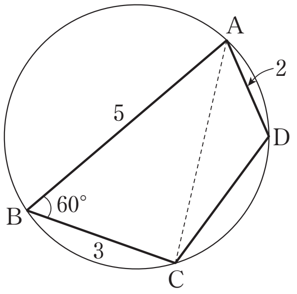
［1］　円に内接する四角形 ABCD において，AB＝5，BC＝3，DA＝2，∠ABC＝60° であるとき，CD＝ ア ，△BCD＝$\dfrac{\boxed{イウエ}\sqrt{3}}{76}$，BD＝$\dfrac{\boxed{オカ}}{\sqrt{19}}$ である．

［2］　△ABC の 3 辺の長さが AB＝6，BC＝5，CA＝4 である．このとき

cos∠B＝$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．また，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を L とすると，

BL＝ ケ ，AL＝ コ $\sqrt{\boxed{サ}}$ である．

解答例



［1］　△ABC で余弦定理より

$AC^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos60^\circ=19$　　$AC=\sqrt{19}$

CD＝x とおくと，△ACD で余弦定理より

$19=x^2+2^2-2\cdot x\cdot2\cdot\cos120^\circ$

$x^2+2x-15=0$　　$x>0$ より　$x=3$　　よって　CD＝**3**

∠BCD＝θ とおく

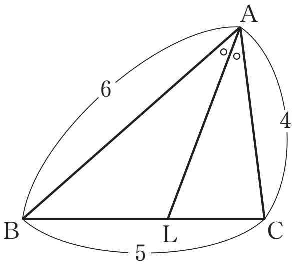
△BCD で余弦定理より　$BD^2=3^2+3^2-2\cdot3\cdot3\cdot\cos\theta=18-18\cos\theta$　……①

△ABD で余弦定理より　$BD^2=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cdot\cos(180^\circ-\theta)=29+20\cos\theta$　……②

①，②より　$29+20\cos\theta=18-18\cos\theta$　　よって　$\cos\theta=-\dfrac{11}{38}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{21\sqrt{3}}{38}$　　よって　$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot\sin\theta=\dfrac{\mathbf{189}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{76}}$

①より　$BD^2=18-18\cdot\left(-\dfrac{11}{38}\right)=\dfrac{441}{19}$　　よって　$BD=\dfrac{\mathbf{21}}{\sqrt{19}}$



［2］　△ABC で余弦定理より　$\cos\angle B=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

AL は ∠BAC の二等分線だから　BL：LC＝AB：AC＝3：2

よって　$BL=\dfrac{3}{5}\times5=\mathbf{3}$

したがって　△ABL で余弦定理より

$AL^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\cos\angle B=36+9-27=18$

$AL>0$ より　$AL=\mathbf{3\sqrt{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。